DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Si x et y sont deux vecteurs de E, on note (x, y) leur produit scalaire. On note $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal de E, c'est-à-dire le groupe formé par les endomorphismes μ de E tels que $(\mu(x), \mu(y)) = (x, y)$ pour tous x, y dans E. La composée des deux endomorphismes μ et ν de E est notée $\mu\nu$.

Pour tout vecteur u non nul de E, on note ω_u la symétrie orthogonale parallèlement à la droite $\mathbb{R}u$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie finie non vide de E ne contenant pas le vecteur nul. On note $W(\mathcal{A})$ l'ensemble formé des éléments $\omega_{u_1}\omega_{u_2}\ldots\omega_{u_r}$ lorsque r parcourt $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et u_i est un élément de $\mathcal{A}$ pour tout i dans $\{1, \ldots, r\}$.

PARTIE I

Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. Soit $\rho_{u,v}$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\rho_{u,v}(x) = x - (v, x)u, \quad \forall x \in E.$$

I.1.

I.1.*a*. Montrer que $\rho_{u,v}$ est un endomorphisme de E.

I.1.*b*. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\rho_{u,v}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le produit scalaire (u, v) pour que $\rho_{u,v}$ soit diagonalisable.

I.1.*c*. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le produit scalaire (u, v) pour que $\rho_{u,v}$ soit inversible et déterminer son inverse dans ce cas.

I.2.

I.2.*a*. Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\rho_{u,v}$

I.2.*b*. Montrer que pour tout vecteur u non nul, il existe un unique vecteur non nul, noté $\hat{u}$, tel que $\rho_{u,\hat{u}}$ appartienne à $\mathcal{O}(E)$. Expliciter $\hat{u}$ en fonction de u.

I.2.*c*. Montrer que $\rho_{u,\hat{u}} = \omega_u$.

I.3. Soit $\mathcal{A}$ une partie finie non vide de E ne contenant pas le vecteur nul. Montrer que $W(\mathcal{A})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$.

PARTIE II

Dorénavant E est supposé de dimension 4 sur $\mathbb{R}$; soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée de E. On considère les sous-ensembles de E suivants :

$$\mathcal{R}_1 = \{\varepsilon e_i \;/\; i \in \{1,2,3,4\}, \varepsilon \in \{1, -1\}\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{\varepsilon_i e_i + \varepsilon_j e_j \;/\; (i,j) \in \{1,2,3,4\}^2, i < j, (\varepsilon_i, \varepsilon_j) \in \{1, -1\}^2\}$$

$$\mathcal{R}_3 = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i e_i \;/\; \varepsilon_i \in \{1, -1\}, \forall i \in \{1,2,3,4\}\right\} \qquad \mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3.$$

Soit G l'ensemble des éléments ϕ de $\mathcal{O}(E)$ tels que $\phi(\mathcal{R})$ soit contenu dans $\mathcal{R}$.

II.A

II.A.1. Calculer les cardinaux de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}$.

II.A.2. II.A.2.*a*. Soit ϕ un élément de G. Montrer que $\phi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et que ϕ définit une permutation de $\mathcal{R}$.

II.A.2.*b*. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$.

II.A.2.*c*. Définir une application injective de G dans le groupe des permutations de $\mathcal{R}$ et montrer ainsi que G est un groupe fini dont on majorera l'ordre.

II.A.2.*d*. Soit ϕ un élément de $\mathcal{O}(E)$. Montrer l'équivalence : $\phi \in G \iff \phi(\mathcal{R}_2) = \mathcal{R}_2$.

Quelle nouvelle majoration obtient-on ainsi sur l'ordre de G ?

Soit H l'ensemble des éléments ϕ de $\mathcal{O}(E)$ tels que $\phi(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_1$.

A SUIVRE

II.A.3. II.A.3.*a.* Montrer que H est un sous-groupe de G.

II.A.3.*b.* Décrire les éléments de H et montrer que $H \neq G$. Quel est l'ordre de H et que peut-on en déduire pour l'ordre de G ?

II.A.3.*c.* Montrer que :

$$H = W(\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \cup \{e_i - e_j \ ; \ (i,j) \in \{1,2,3,4\}^2 / i \neq j\}) = W(\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2).$$

II.A.4. II.A.4.*a.* Soit ϕ un élément de G tel qu'il existe i dans $\{1,2,3,4\}$ tel que $\phi(e_i)$ appartienne à $\mathscr{R}_1$. Montrer alors que ϕ est dans H.

II.A.4.*b.* Soit $u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i e_i$ un élément de $\mathscr{R}_3$. Exprimer $\omega_u(e_1)$ sur la base (e_1, e_2, e_3, e_4).

II.A.4.*c.* Soit ϕ un élément de G qui n'est pas dans H. Montrer qu'il existe u dans $\mathscr{R}_3$ et ε dans $\{1, -1\}$ tel que $\omega_u(e_1) = \varepsilon\phi(e_1)$.

II.A.4.*d.* Montrer que $G = W(\mathscr{R})$.

II.A.5. II.A.5.*a.* Soient u et v dans $\mathscr{R}_3$. Montrer l'équivalence :

$$\omega_u\omega_v \in H \iff \exists i \in \{1,2,3,4\} \quad \text{et} \quad \exists \varepsilon \in \{1,-1\} \text{ tels que } \omega_v(e_1) = \varepsilon\omega_u(e_i).$$

II.A.5.*b.* Soit $u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i e_i$ dans $\mathscr{R}_3$. Déterminer les valeurs $(\delta_1, \ldots, \delta_4)$ dans $\{1,-1\}^4$ pour lesquelles l'élément $v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \delta_i e_i$ vérifie : $\omega_u\omega_v$ appartient à H.

II.A.5.*c.* Quel est l'ordre de G ?

II.B

Dans cette partie on considère l'ensemble K formé par les endomorphismes ϕ de E tels que $\phi(\mathscr{R}) = \mathscr{R}$.

II.B.1. II.B.1.*a.* Montrer que tout élément de K est inversible.

II.B.1.*b.* Montrer que K est un groupe fini.

II.B.2. On considère l'application B définie de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$B(x,y) = \sum_{\phi \in K} (\phi(x), \phi(y)), \quad \forall (x,y) \in E \times E.$$

II.B.2.*a.* Montrer que B est un produit scalaire sur E.

II.B.2.*b.* Montrer que tout élément ϕ de K est une isométrie pour B, c'est-à-dire que :

$$B(\phi(x), \phi(y)) = B(x,y), \quad \forall (x,y) \in E \times E.$$

II.B.3.

II.B.3.*a.* Soit x un élément de $\mathscr{R}$ et soit y dans E. Montrer que $B(x,y) = 0$ si et seulement si $(x,y) = 0$ (on pourra considérer ω_x).

II.B.3.*b.* En déduire qu'il existe un réel λ tel que $B(x,y) = \lambda(x,y)$ pour tous x, y dans E. Que peut-on dire de λ ?

II.B.4. Montrer que $K = G$.

II.B.5. Que dire de l'ensemble formé par les endomorphismes ϕ de E tels que $\phi(\mathscr{R}_2) = \mathscr{R}_2$?

FIN